12. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA – teoria

12.1. Zdarzenie losowe.

a) **Doświadczenie losowe** jest to doświadczenie , którego wyniku nie można przewidzieć.

b) **Zdarzeniem elementarnym** ω nazywamy pojedyńczy wynik doświadczenia losowego.

c) **Przestrzeń zdarzeń elementarnych** Ω nazywamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

d) **Zdarzeniem losowym** nazywany każdy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych.
Zdarzenia oznaczamy literami $A, B, C,...$.
Każde zdarzenie elementarne $\omega \in A$ sprzyja zdarzeniu A.

e) **Zdarzenie pewne** jest to zbiór Ω

f) **Zdarzenie niemożliwe** jest to zbiór $\varnothing$.

g) **Działania na zdarzeniach**
Działania na zdarzeniach wykonujemy analogicznie do działań na zbiorach

1) Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne, sprzyjające zdarzeniu A lub zdarzeniu B.

2) Iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne, sprzyjające zdarzeniu A i zdarzeniu B.

Dwa zdarzenia A i B nazywamy wykluczającymi się (rozłącznymi) , jeżeli zdarzenie $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym, czyli gdy $A \cap B = \varnothing$.

3) Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, do którego należą zdarzenia elementarne, sprzyjające zdarzeniu A i nie sprzyjające zdarzeniu B.

Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A.
Zdarzenia A i B są zdarzeniami przeciwnymi, jeżeli $A \cup B = \Omega$ i $A \cap B = \varnothing$

12.2. Prawdopodobieństwo

a) **Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**
Jeżeli Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych i $A \subset \Omega$,

to liczbę $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A

$\overline{\overline{A}}$ - moc zdarzenia A (liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A)
$\overline{\overline{\Omega}}$ - moc przestrzeni Ω (liczba wszystkich zdarzeń elementarnych)

b) **Własności prawdopodobieństwa**

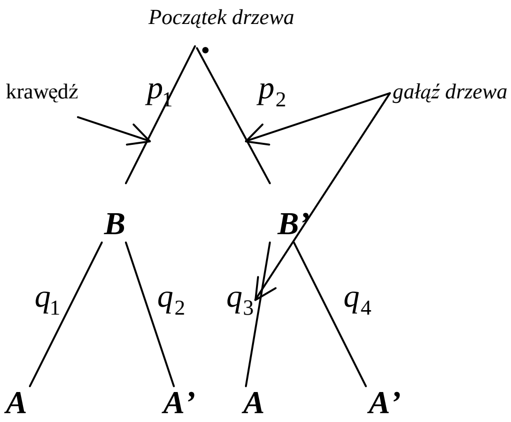
Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych i $A, B \subset \Omega$

1) $0 \le P(A) \le 1$
2) $P(\emptyset) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$
3) Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \le P(B)$
4) $P(A') = 1 - P(A)$
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

12.3 . **Drzewo stochastyczne**

Drzewem stochastycznym nazywamy graf ilustrujący przebieg wieloetapowego doświadczenia losowego. Wierzchołkom drzewa stochastycznego przyporządkowane są wyniki poszczególnych etapów doświadczenia, a krawędziom prawdopodobieństwa uzyskania tych wyników. Suma prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom wychodzącym z tego samego wierzchołka jest równa 1.

Przykład drzewa doświadczenia dwuetapowego



B, B' – dwa możliwe wyniki w pierwszym etapie doświadczenia

A, A' – dwa możliwe wyniki w drugim etapie doświadczenia

p_1 - prawdopodobieństwo otrzymania wyniku ***B*** w pierwszym etapie

p_2 - prawdopodobieństwo otrzymania wyniku ***B'*** w pierwszym etapie

q_1, q_3 - prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania wyniku ***A*** w drugim etapie

q_2, q_4 - prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania wyniku ***A'*** w drugim etapie

$p_1 + p_2 = 0 \qquad q_1 + q_2 = 0 \qquad q_3 + q_4 = 0$

Gałąź drzewa stochastycznego – ciąg krawędzi prowadzących od początku drzewa do jednego z ostatnich jego wierzchołków.

Reguła iloczynów: Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź .

Reguła sum : Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych regułą iloczynów dla tych gałęzi.

12.4. **Średnia arytmetyczna**

Średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ nazywamy liczbę $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$

12.5. **Średnia ważona**

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ z odpowiadającymi im wagami

$n_1, n_2, n_3, ..., n_k \in R_+$ nazywamy liczę $\overline{x_w} = \dfrac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + ... + n_k \cdot x_k}{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k}$

12.6. **Mediana**

Medianą nazywamy wartość środkową danych uporządkowanych niemalejąco (od najmniejszej do największej)

Medianę oznaczamy M lub m_e

Medianę wyznaczamy według wzorów:

a) jeśli n – nieparzysta liczba danych , to $M = x_{\frac{n+1}{2}}$ (mediana jest wartością środkową)

b) jeśli n – parzysta liczba danych , to $M = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

(mediana jest średnią arytmetyczną dwóch środkowych wartości)

12.7. **Dominanta (wartość modalna , moda)**

Dominantą nazywamy najczęściej występującą wartość.

Dominantę oznaczamy D lub m_o

a) Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z taką samą najwyższą częstością to każda z nich jest dominantą.
b) Jeśli wszystkie liczby występują tak samo często, to dominanty nie ma.

12.8. **Wariancja i odchylenie standardowe**

a) Wariancją nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń od średniej arytmetycznej.

Wariancję liczb $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ liczymy ze wzoru

$$\delta^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

b) Odchyleniem standardowym nazywamy średnią kwadratową odchyleń od średniej arytmetycznej.

Odchylenie standardowe liczb $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ liczymy ze wzoru

$$\delta = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$